万智牌中应该 4+0 还是 3+1？

当我们微调构筑时，时常会面临一个选择：是 4+0 还是 3+1（当然也可能 2+2）？本文致力于对这个问题进行部分的解答。【探索未然】3.加油啊，不放满一组的大哥哥 (qq.com)中对这一问题有描述，并且给出了自己的结论：我们应该对更主流的卡组来针对，尤其是当主流在 meta 中超过 50%时，4+0 总是优于 3+1 的。然而事实真是如此吗？3+1 是人们空穴来风、无法依赖的错觉吗？本文将对这个问题进行审视，并且给出 3+1 配置直觉产生的依据。

如果我们选择 3+1，会有何种好处？从套牌自身出发，可能是该卡片没有好到让我们满编 4；也可能该卡片虽然好，但是受到传奇规则或该卡片在对局中的定位，复数上手导致价值显著降低，甚至手牌-1，因而不愿满编。而某些 1 的卡片，我们期望在某些对局中发挥不错的作用，或者和 3 的卡片同时上手时，增加对策多样性，如果这张卡片在一般的对局中价值也没有太差就更好了。——这些都是从套牌内部出发的考虑，下文不再赘述，转而专心研究在针对 meta 时的配置方法。

案例分析

为了深入浅出地分析该问题，笔者设置了一系列递进的例子，来帮助读者从直觉和数学上来理解（由于数学推导较为繁琐，正文中部分内容将直接引用结论，推导和证明过程移至文末，以飨欲剖析数理的读者）。

Case 1

对手抛一枚硬币，其为正面的概率为 m1，负面为 m2，不妨设 m1≥m2，且 m1+m2=1。而你有一堆卡牌，其中每张卡为正面的概率都为 x1，负面概率为 x2，且 x1+x2=1（这和实际不同。如 30 地套牌，抓 1 张是地的概率为 30/60，第二张是地的概率则是 29/59 或 30/59，取决于第 1 张是否是地；但在 case 中，则始终是 1/2 的概率）。你只抓 1 张牌，如果卡牌结果包含硬币结果即获胜。问：我们应该怎样设置 x1 和 x2，以最大化获胜期望？

答： 因为我们只抓 1 张卡牌，所以我们的获胜期望 E=m1*x1+m2*x2=m1*x1+m2*（1-x1）=m2+（m1-m2）x1。由于 m1≥m2，则这是一个关于 x1 的单调递增函数，x1=1 时取得最大值，此时 x2=0，E=m1。

分析： 该 case 的一个直观理解为，对手抛硬币 70%的概率为正，30%为负，而我们只能猜一次正负。我们的最佳策略是 100%猜正。即使正的概率为 51%——只要大于 50%，我们的最佳策略始终是猜正面——很好理解，对吧？上文引用的文章的数学依据其实正是这样。

启示：当你只有 1 张牌时，你最佳的选择就是 all in 主流。

Case 2

在 case 1 的基础上，我们这次抓 2 张牌，只要卡牌中包含硬币结果即可。问：我们应该怎样设置 x1 和 x2，以最大化获胜期望？

答： 抓 2 张牌，当为正面时，我们不全是负面即可，这种概率为 m1*（1-x2^2）；负面时同理。则我们的获胜期望是 E=m1*（1-x2^2）

+m2*（1-x1^2）=1-（m1*x2^2+m2*x1^2）=1-m1*m2-（x1-m1）^2。这是一个关于 x1 的一元二次函数，x1≤m1 时单调递增，x1≥m1 时单调递减。故 x1=m1，x2=m2 时获胜期望取到最大值。

分析：和 case 1 的结果不同，case 2 中的 x1 和 x2 按照 m1：m2 的比例分配。这意味着，如果硬币 70%概率为正，而我们只能抓 2 张牌时，我们应该在牌库中放 70%的正面牌，30%的负面牌。

这似乎就是最符合我们直觉的想法！meta 中两种套牌有多少分布，我就投入对应数量的针对牌！但，冷静！冷静！冷静！我们要注意该 case 的假设条件：套牌中全为针对牌，而我们可以抓 2 张牌。这和实际情况完全是不同的。

那为什么这种情况下，就不再是 all in 主流了呢？因为只需要包含硬币结果即可，那么复数张上手无意义（可稍微类比为边际效益降低）。如果我们依然选择全部猜正面，胜率只有 70%，那么两张卡牌都必然猜正面，是一种浪费。若我们 70%猜正面，当是正面时，我们有 1-30%*30%=91%的概率猜对；负面时，我们有 1-70%*70%=51%的概率猜对。此时获胜期望为 91%*70%+51%*30%=79%。相当于我们用 9%猜错 70%概率的情况的代价，换来了 51%猜对 30%的概率，这是很划算的，同时这也是数学计算下的最优解。

启示：3+1 的配置是有道理的，人们的直觉在某些情况下是合理的。但问题在于，我们需要谨慎地确定“某些情况”究竟是何种情况。

Case 3

在 case 2 的基础上，我们这次不抓 2 张牌，转而抓 n 张牌，问：

我们应该怎样设置 x1 和 x2，以最大化获胜期望？

答：分析方法同 case 2，最优策略如下。

$$x_1 = \frac{\sqrt[n-1]{m_1}}{\sqrt[n-1]{m_1} + \sqrt[n-1]{m_2}}$$
$$x_2 = \frac{\sqrt[n-1]{m_2}}{\sqrt[n-1]{m_1} + \sqrt[n-1]{m_2}}$$

分析：可以看到，x1 和 x2 的数值，是按照 m1 和 m2 的开 n-1 次方来分配的。case 2 中按照 m1 和 m2 分配是 case 3 中 n=2 的一个特例。当 n 变得很大时，x1=x2=50%。应该作何理解？牌数增多，我们的牌中几乎总能包含正面，因而需要匀出来一些概率去“照顾”负面，最终最优策略就是 50%对 50%。

以硬币 70%正面为例，最优策略和获胜期望如下表。当抓五张牌时，我们猜测正面的概率只有 55%，但获胜期望高达 97%。这其中，有 93%的概率，牌中有正有负，必胜；有 4%概率，全正或全负，也依然猜对；只有剩下 3%的情况牌中不包含硬币结果，输了。97%的胜率，已经远远高于 70%这种 all in 的策略了。

抓牌数	x1	x2	获胜期望
1	1	0	0.70
2	0.70	0.30	0.79
3	0.60	0.40	0.89
4	0.57	0.43	0.94
5	0.55	0.45	0.97

启示：当抓牌数增加时，你应该增多对次主流的关心。

Case 4

在 case 3 的基础上，我们令 x1+x2=μ<1（毕竟针对卡位只占一部分或者一小部分），此时令 x3=1-μ。即，卡牌有μ的概率，不为正或负，是对胜负无作用的牌。问：在给定的μ下，我们应该怎样设置 x1 和 x2，以最大化获胜期望？

答：分析方法同 case 3，最优策略如下（请注意！你不需要理解这个公式！下文中会有简化版本）。注意到，就是在 case 2 的结果上，各自增加了一个负的偏移量。

$$x_1 = \frac{\sqrt[n-1]{m_1} - (1-\mu)\sqrt[n-1]{m_2}}{\sqrt[n-1]{m_1} + \sqrt[n-1]{m_2}}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[n-1]{m_2} - (1-\mu)\sqrt[n-1]{m_1}}{\sqrt[n-1]{m_1} + \sqrt[n-1]{m_2}}$$

这种情况下，应有 0≤x2≤x1≤μ，所以约束如下（也不需要理解）。约束满足则按照上式分配，不满足则全部分配给 x1，即：x1=μ，x2=0。

$$\mu \geq 1 - \frac{\sqrt[n-1]{m_2}}{\sqrt[n-1]{m_1}}$$

分析：case 4 的结果，说明了分配情况和调整卡位数量有关。当调整卡位很少时，近似退化为 case 1 中 all in 的情况；调整卡位合适时，近似退化为 case 3 中分散分配的情况。

启示：似乎存在一个界限，当调整卡位低于该界限时，应该 all in 主流。

Case 5

Case 4 已经完成了主题探讨的模型要求，但其过于复杂，因而笔

者在本 case 中对其进行近似。我们定义牌库中的牌为 m（万智牌中即为 60），在一个对局中考虑前 n 张牌（本文中取 12，即进行到自己的第五回合时抓到的牌数）。

将 case 4 中的约束条件恰好满足时的解近似为 zero-cards 如下。注意看，这个公式叫作小零，自然对数的装饰让他睿智灵秀，简单的分子式在他的身上却添了朴素的妖娆。咳咳……这个公式仅需要计算一个对数，常见的有 ln（6/4）≈0.40，ln（7/3）≈0.85，ln（8/2）≈1.40，记住这 3 个近似应该即可满足大部分需求，如果嫌弃计算对数麻烦。

$$zero\text{-}cards \approx \frac{m}{n}\ln(m_1 / m_2)$$

这是本文中最重要的一个参数！他代表了当调整卡位为 zero-cards 时，完全不需要考虑投入针对次主流的卡。如当环境中 70%的主流时，zero-cards=4.24。这意味着当只有 4 个调整卡位时，应该选择 4+0。

我们得到了这个临界值，那如果可调整卡位高于这个数值，我们应该怎么计算？我们依然可以近似处理，方案是：将多出的所有卡位平均分配！哇哦，笔者认为这种分配方法真的很 cool！

举例来说，当有 8 个针对卡位时，那么多出来的 3.76 卡位平均分配，次主流得到 1.88 张，其余则分配给主流。也即 x1=6.12，x2=1.88。四舍五入则有 x1=6，x2=2——这便是我们的最优分配。

启示：计算出 zero-cards，则我们可以为所欲为！

Case 6

现在提出我们的万智牌问题。套牌为 m 张牌，我们研究套牌中的前 n 张牌，其中关注的卡位数为 k（即如何分配 k 到两种针对卡上）。

以上模型中，我们假设了每张卡牌是独立同分布。但万智牌中，每张牌之间会互相影响。以 60 套牌 30 张地的情况来说，抓 7 张牌，没有咒语的概率为 0.53%（利用组合数进行计算，等于 C（30,7）/C（60,7），该解为精确解，下文计算同理，不再展示计算过程），而利用上述模型，计算结果为 0.78，误差较大；但如果只考虑抓 2 张牌，则没地的理论值为 24.58%，模型计算为 25%，几乎一致；或者我们考虑关注的咒语只有 4 张，抓 7 张手牌，没有关注咒语的概率为 60.05%，模型计算为 61.70%，误差也依然很小。

而对于卡位的分配计算，则会令误差进一步缩小。譬如 5.1:2.9 和 5.3:2.7，最终都会被解为 5+3。笔者在这里没有给出严格的数学证明，但经过诸多测试，在我们考虑的实际应用范围内，误差完全可以接受，上文的模型对于揭示针对卡位配置的定量和定性分析，几乎是很准确的。

启示：All models are wrong, but some are useful（所有模型都是错的，但有些是有用的）.

引文内容探讨

这部分我将对所引文章内容进行讨论。文中有一句话我深以为然：“在一定程度上，这个结论有些反直觉，不是么？不过，数学可不会骗人”。诚然，反直觉的结论往往更有启发性，而正确的数学推导也

不会骗人，但对于数学的解释却可能有欺诈性。

文中将 60 抓 15 简单地处理为 4 抓 1，这是个极其严重的 trick。如果读者顺利阅读了本文，可以意识到，4 抓 1 本质上是 case 1 的情况，而 60 抓 15 更接近 case 4 的情况（case 3 也可以近似理解）。对手抛硬币，70%概率为正，现在你可以猜一次，请问你猜什么？——当然 100%猜正。这个事情反直觉吗？并不。因为我们解释清楚了问题。而 60 抓 15 和 4 抓 1 的差别，就像你接了个 1 地后手，你能在第二回合下第二块地的概率是多少（假设牌库有一半是地）？如果按照期望，那我 2 块地中必然有 1 块地。但事实上，你只有 1-0.5*0.5=0.75 的概率能下第二块地。

文章选择前 15 张牌来分析，只是因为恰好 60/4=15。当调整卡位变为 5 或 6 时，如果按照其分析思路，转而分析前 12 或 10 张牌，分析结果依然是你应该 all in。4 抓 1 只有 1 张牌，但 60 抓 15 除了抓到 0 和 1 之外，还可能抓到 2 或以上针对牌。文章正是完全忽略了这些情况，才得到了片面的结论。

即使按照文章的思路，我们仍然可以诘问：当环境比例为 50%：50%时，根据对称性，2+2 至少不会坏于（甚至优于）4+0。那么当环境变为 50.01%：49.99%时，我们就应该毫不迟疑地将 2+2 变化为 4+0 吗（甚至其中都没有 3+1 的过渡）？

当结论反直觉时，我们首先要小心地检查我们的结论，是否模型出现了谬误，是否我们对结论的解释出现了偏差。数学不会欺人，但人会自欺。甚至还会用错误的结论，去否定那些也许正确的做法。

本文内容总结

1.万智牌中，套牌为 m 张牌，考虑抓到 n 张牌。环境中主流和次主流占比分别为 m1 和 m2，我们有 k 张针对卡位时，一个近似分配方法如下（本文最重要的结论！）：

①计算出 zero-cards。

$$zero-cards \approx \frac{m}{n}\ln(m_1/m_2)$$

②k<zero-cards，则分配结果为 k：0；

③k>zero-cards 时，将超出部分平分即可。

$$\begin{aligned} &zero\text{-}cards \approx \frac{m}{n}\ln(m_1/m_2) \\ &x_1 = \frac{k + zero\text{-}cards}{2} \\ &x_2 = \frac{k - zero\text{-}cards}{2} \end{aligned}$$

2.精确解下当环境套牌为 65%：35%，即近似为 2:1 时，我们应当选择 3+1 而非 4+0。事实上这个比例也可以通过式子反解。我们令 x2=0.5（0.5~1.5 都会近似到 1，故取下界），得到 m1/m2=1.82，即 m1=64.57%。和理论值几乎一致。

3.本文仅假设了环境中存在两种套牌。但可以灵活地应用到更加细碎的meta中仅考虑针对两套牌时的问题。譬如环境中40%的主流，30%的次主流和 15%的次次主流，你针对后两者有四个卡位，并且两种针对卡对 40%主流收益一致，则完全可以按照 30%：15%=66%：34%的情况来探讨。按照上一条结论，应该选择 3+1。

4.本文仅考虑针对 meta 时的卡位分配收益，并且将针对到的收

益设置为 1，未针对到的收益设置为 0（即抓到针对就赢，且针对牌在另一个对局中作用为 0）。即使是在这种极端假设下，依然说明了合理分配的重要性。所以 3+1 甚至 2+2，在合适的 meta 中、合适的情况下确实会有一定的优势，但这需要牌手对于 meta 敏锐的观察和自己套牌深刻的理解。

5.如果考虑到 4+0 会复数上手，边际效益递减；3+1 中的 1 的收益也没有那么差；即使在非针对性对局中 1+1 也可能好于 2+0 的上手等情况，多元化卡牌配置可能更加具有优势。不过也要注意，本文的假设中，暗含了重复上手的牌是完全无价值的。该假设在大部分情况下都是合理的。当然如果针对快攻，抓到复数的杀不是坏事，此时请自行斟酌，模型未予以考虑，不过应该相去不远。在加入自己的理解时，确保你有自信可以从中获益，你在做正确的事情。

6.需要注意到，本文的结论虽然是针对主牌，但对于备牌也是同样适用的（因为可以等价为将对应备牌都换入，然后考察抓到特定针对牌的情况）。譬如你有 4 个备牌位置需要针对 2 个卡组，而这两个卡组的 meta 占比近似为 2:1，那么你应该大约采取 3+1 的策略。

7.本文除了给出 meta 下针对卡牌分配问题的数学解释和直观理解之外，笔者的主要写作目的就是：**如果你对套牌和 meta 都有较深的理解，而你想要微调构筑，那么就去放胆尝试！**

附录内容

将将将，欢迎来到推导过程~

Case 3

在 case 2 的基础上，我们这次不抓 2 张牌，转而抓 n 张牌，问：我们应该怎样设置 x1 和 x2，以使我们的获胜期望最大？

答：分析方法同 case 2，获胜期望 E =m1*（1-x2^n）+m2*（1-x1^n）=1-（m1*x2^2+m2*x1^2），这是一个关于 x1 的 n 次函数，欲求其最值，需要对其进行求导。导函数 E'=n*（m1*x2^（n-1）-m2*x1^（n-1）），其为关于 x1 的递减函数，则期望函数在导函数为 0 处取得极值，此时可以解出 x1 和 x2。

$$x_1 = \frac{\sqrt[n-1]{m_1}}{\sqrt[n-1]{m_1} + \sqrt[n-1]{m_2}}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[n-1]{m_2}}{\sqrt[n-1]{m_1} + \sqrt[n-1]{m_2}}$$

Case 4

在 case 3 的基础上，我们令 x1+x2=μ<1（毕竟不可能 60 张牌全是针对），此时增加 x3=1-μ。即，卡牌有μ的概率，不为正或负，是空，对获胜无作用。问：我们应该怎样设置 x1 和 x2，以使我们的获胜期望最大？

答：分析方法同 case 2，获胜期望 E =m1*（1-（1-x1）^n）+m2*（1-（1-x2）^n），这是一个关于 x1 的 n 次函数，不同的是不再有 x1+x2=1，转而有 x1+x2=μ。计算结果如下。注意到，x1 和μ，x2 和μ都是线性关系。这意味着，对于μ已经完成的分配，当增加新的Δμ，x1 和 x2 的分配增加比例为 m2 和 m1 的开 n-1 次方之比，对于 x1 的增幅小于 x2（但 x1 的初始值大于 x2，如果μ继续增加到 1，就退化为了 case 3 的结果）。

$$x_1=\frac{\sqrt[n-1]{m_1}-(1-\mu)\sqrt[n-1]{m_2}}{\sqrt[n-1]{m_1}+\sqrt[n-1]{m_2}}$$
$$x_2=\frac{\sqrt[n-1]{m_2}-(1-\mu)\sqrt[n-1]{m_1}}{\sqrt[n-1]{m_1}+\sqrt[n-1]{m_2}}$$

分析：x1+x2=μ，所以相比于 case 3 的结果，x1 和 x2 分别有了一个负的偏移量。有约束 0≤x2≤x1≤μ，我们要考虑极值是否落在定义域内。令 x2≥0，有以下约束。当下式满足时，按照计算结果分配即可；若不满足，函数关于 x1 是单调递增的，此时解取到边界，即 x1=μ，x2=0。

$$\mu\geq 1-\frac{\sqrt[n-1]{m_2}}{\sqrt[n-1]{m_1}}\ or\ (1-\mu)^{n-1}\leq\frac{m_2}{m_1}\ or\ n\leq\frac{\ln(m_2)-\ln(m_1)}{\ln(1-\mu)}+1$$

令 n 趋近于无穷，结果收敛于 x1=x2=μ/2。这和 case 3 中的结果是一致的，牌数增多，则趋近于平分秋色。

我们应该作何理解？case 3 中说明了，抓牌增多，要对次主流多加关心；同时 case 1 中说明了，只能抓到很少的牌（比如 1）时，应该 all in 主流。该 case 中，μ的存在，期望上减少了抓到针对牌（正或负）的数量。如果μ很小，我们期望抓到的牌就会很少，反之则可近似为 case 3 中的某些情况。

以硬币 70%正面为例，首先计算 x2≥0 的约束。我们考察不同的 n 下的μ的最小值。

n	最小μ
1	\
2	0.57

3	0.35
4	0.25
5	0.19

注意到n*μ是趋近于1的，考虑如下极限。将数据代入，70%算例中该极限为0.85。

$$\lim_{n\to\infty} n*\mu = \frac{\sqrt[n-1]{m_1/m_2}-1}{\sqrt[n-1]{m_1/m_2}} n = (e^{\frac{\ln(m_1/m_2)}{n-1}}-1)n = \frac{n}{n-1}\ln(m_1/m_2) = \ln(m_1/m_2)$$

边界分析：定义δ为x2的期望下界，考察x2≥δ的边界情况，有如下结果。μ和δ（即x2）为线性关系。

$$\lambda = \sqrt[n-1]{m_1/m_2}$$

$$\mu = \frac{\lambda+1}{\lambda}\delta + \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

万智牌中，一张牌占比为1/60=0.017，而λ的计算和n有关，以下例子中我们假定n=12（即我们关注万智牌到第五回合自然抓到的牌数）。令δ’=1/60，则δ代表一张牌，定义给x2分配1张时可调整卡牌数为one-cards。令δ＝δ’，计算出one-cards=6.37。这意味着当可调整卡位为6.37时，x2=1，x1=5.37。另一方面，定义给x2分配0张时可调整卡牌数为zero-cards。即令δ=0，计算出zero-cards=4.45。这意味着当可调整卡位为4.45时，x2=0，x1=4.45。

$$one\text{-}cards = \frac{\mu}{\delta'} = \frac{\lambda+1}{\lambda} + \frac{\lambda-1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\delta'}$$

$$zero\text{-}cards = \frac{\mu}{\delta'} = \frac{\lambda-1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\delta'}$$

由于μ和δ为线性关系，则我们根据one-cards和zero-cards可以计算出所有的μ和δ的对应值。如x2=0.5，对应的μ＝（one-cards+zero-cards）/2=5.41。这意味着当μ在 5.41~7.33 时，x2 在 0.5~1.5。由于卡牌只有为整数张，采用四舍五入，该区间内令 x2=1。类似地，我们可以将计算结果填入下表。

可调整卡位数量	x1	x2
0~4.45	满编	0
4.45~5.41	视 x2 决定	0~0.5，但取整为 0
5.41~7.33	视 x2 决定	0.5~1.5，取整为 1
7.33~9.25	视 x2 决定	1.5~2.5，取整为 2

分析：n=12，m1=70%的条件下，调整卡位小于 zero-cards=4.45 时，完全不考虑对 x2 的分配；而在 zero-cards 的基础上增加新的调整卡位时，x1 和 x2 的增加量按照 1:1.08 分配（可近似为 1:1 分配，即从调整卡位从 4.45 增加到 6.45，近似有 x2=1，x1=5.45）。

渐进分析：n 较大时，开 n-1 次方会快速趋近于 1，80%：20%和 90%：10%的环境，该比值为 1：1.13 和 1：1.22，几乎都可以近似为 1：1。由于可调整卡位并不多，所以初始分配起较多的作用。x2 想要壮大自己，只能寄希望于有更多的卡位，或 m2 没有小 m1 太多。

令套牌中卡牌数为 m，δ’=1/m。n 趋近于无穷时，令 m/n 为定值。我们发现 zero-cards 与 m、n、m1、m2 有关，其中 m1/m2 是表征 meta 分布的一个参数，而 m 在万智牌中即为 60，n 是我们的研究抓牌数，本文中取 12。zero-cards 是研究分配问题最重要的一个参数，one-cards 也只是在前者上加 2。

一个近似的分析流程如下：如果调整卡位低于 zero-cards，那么

全部选择主流；每当调整卡位多 2 个，则分别分配给主流和次主流 1 个卡位。

$$\lim_{n\to\infty} zero\text{-}cards = \frac{\mu}{\delta'} = m\frac{\lambda-1}{\lambda} = n\ln(\lambda) = \frac{m}{n-1}\ln(m_1/m_2) = \frac{m}{n}\ln(m_1/m_2)$$

$$\lim_{n\to\infty} one\text{-}cards = \frac{\mu}{\delta'} = \frac{\lambda+1}{\lambda} + m\frac{\lambda-1}{\lambda}m = 1+\frac{1}{\lambda} + zero\text{-}cards = 2+\frac{m}{n}\ln(m_1/m_2)$$

算例：以 m=60，n=12，m1：m2=0.7:0.3 为条件。zero-cards=60/12*ln（7/3）=4.24。因而只有 4 个调整卡位时，应该选择 4+0；而当调整卡位增加到 8 时，将增加的 3.76 平分，应该选择 6.12：1.88，取整则选择 6+2。

Case 6

计算机让我们可以轻易地穷举这些情况。考虑 n=12，k=4 的情况，依然定义抓到针对牌即获胜。不同配置的胜率如下。而模型的计算结果为 x1=4.23，x2=-0.23。由于 x2 为负，故结果修正为 x1=4，x2=0，和精确解一致。

x1,x2	胜率
0,4	18.03%
1,3	28.84%
2,2	36.27%
3,1	40.62%
4,0	42.07%

考虑 n=20，k=10 的情况，以进一步考察模型的有效性。不同配置胜率如下（节选）。模型的计算结果为 m1=6.23，m2=3.77，依然十

分地准确。我们同时考察我们的近似估算。此时 zero-cards=60/20*ln（7/3）=2.54。将 7.46 平分，有 x1=6.27，x2=3.73，也十分地准确。

x1,x2	胜率
4,6	84.58%
5,5	87.80%
6,4	89.01%
7,3	87.96%
8,2	84.68%

我们甚至考虑 m=1000，n=k=200 的情况，该种情况下，最优配置为 x1=102，x2=98，胜率约等于 1。而我们的模型结果为 x1=101.92，x2=98.08。近似估算，zero-cards=1000/200*ln（7/3）=4.24，将 195.76 平分，得出解为 x1=102.12，x2=97.88，估算的准确性也得到了保证。

以上三个随机算例表明了模型具有相当的准确性。

感谢你的阅读，撒花~